

СИМВОЛИЧЕСКАЯ ЛОГИКА И ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

Д. В. Зайцев, МГУ им. М. В. Ломоносова

ЦИКЛИЧЕСКОЕ (ПОЛУ)ОТРИЦАНИЕ, ЛЕВЫЙ ПОВОРОТ И КВАДРАТНЫЙ КОРЕНЬ ИЗ ОТРИЦАНИЯ

1. По мнению авторов [2], квантовая логика переживает сегодня третий этап развития, связанный с парадигмой квантовой вычислимости и открывающимся в связи с этим перспективами обработки информации.

Для обработки квантовой информации предлагается использовать специфические квантовые логические операции – квантовые вентили. В зависимости от их поведения различают «полуклассические» вентили, представляющие собой обобщения стандартных логических операций конъюнкции, отрицания и т.п., и «подлинно квантовые», задающие трансформацию классических состояний в их суперпозиции. Интересно отметить, что для подобных операций существуют физические реализации, но на данный момент отсутствуют общепринятые логические экспликации. Примером такого подлинно квантового вентиля служит «квадратный корень из отрицания» (SRN), названный так, поскольку его двойное применение равносильно отрицанию. Для этой операции оказалось проблематично найти истинностно-функциональное выражение, что позволило авторам [1] поставить логическую задачу формальной экспликации SRN.

2. Единицей представления квантовой информации является кубит, который в отличие от стандартного бита может находиться не только в стандартных состояниях $|1\rangle$ и $|0\rangle$, интерпретируемых как истинность и ложность соответственно, но и в бесконечно большом числе состояний, представляющих собой суперпозицию базовых состояний – $a|1\rangle + b|0\rangle$, где a и b – комплексные числа, удовлетворяющие условию $a^2 + b^2 = 1$. Состояние кубита удобно представить как вектор $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ в двухмерном гильбертовом пространстве C^2 . Тогда упомянутые выше квантовые вентили задаются следующим образом.

Отрицание: $\text{NOT } |\psi\rangle = b|0\rangle + a|1\rangle$.

SRN: $\sqrt{\text{NOT}} \psi = \frac{1}{2}((1+i)a + (1-i)b)|0\rangle + \frac{1}{2}((1-i)a + (1+i)b)|1\rangle$.

3. Представление информационного стояния как суперпозиции базовых состояний напоминает трактовку обобщенных истинностных значений в соответствующем логическом подходе. Отличительные черты этого подхода состоят в следующем. Во-первых, истинностные значения трактуются как сложные, имеющие внутреннюю структуру объекты. Во-вторых, функция приписывания значение также претерпевает соответствующее обобщение. В-третьих, появляется возможность задать целый спектр отношений типа следования через постулирование различного рода связей (сохранность от посылок следствию, несовместимость и т.п.) между различными компонентами обобщенных значений.

4. В работах [4] [5] развиваются обобщения классической логики и в частности рассматриваются различные унарные операции, выразимые в обобщенной семантике, в том числе операции «полуотрицаний» и «левого поворота». Полуотрицания меняют одну из двух составляющих обобщенного истинностного значения, поэтому их двойное применение равносильно обычному отрицанию и в этом смысле они напоминают SRN.

Левый поворот представляет собой «сдвиг» влево на четырехэлементной решетке, напоминающий циклическое отрицание в логиках Поста. В работе [3] представлены первые результаты применения данного подхода к квантовой вычислимости.

5. В выступлении планируется следующее.

Во-первых, будет предложено представление состояния кубита в четырехмерном базисе. Это связано с возможностью разложения комплексных коэффициентов на мнимую и действительную части. В результате вектор $|\psi\rangle$ представим как $a_0 |F\rangle + a_1 |FU\rangle + b_0 |T\rangle + b_1 |TU\rangle$, где a_0 и b_0 вещественные составляющие коэффициентов, а a_1 и b_1 их мнимые составляющие.

Во-вторых, предлагается интерпретация SRN как операции «левого поворота», что означает циклический сдвиг коэффициентов:

$$\sqrt{\text{NOT}} \psi = b_1 |F\rangle + a_0 |FU\rangle + a_1 |T\rangle + b_0 |TU\rangle.$$

В-третьих, будут намечены пути аксиоматизации пропозициональных логик квантовой вычислимости и представлена одна из возможных аксиоматизаций, соответствующая «классической» логике квантовой вычислимости.

Литература

- [1] Deutsch D., Ekert A., and Lupacchini R. Machines, logic and quantum physics. *Bulletin of Symbolic Logic*, 3, 2000, pp. 265-283.
- [2] Dunn J.M., Moss L.S., Wang Z. Editors' introduction: the third life of quantum logic: quantum logic inspired by quantum computing. *Journal of Philosophical Logic*, 42(3), 2013, pp. 443–459.
- [3] Grigoriev O. M. Generalized truth values and quantum logic. *Десятые Смирновские чтения по логике. Материалы Международной научной конференции. 15-17 июня 2017 года* / Ред. И. А. Герасимова, О. М. Григорьев, Д. В. Зайцев. — Москва: Москва, 2017. — Р. 70–71.
- [4] Zaitsev D. Logics of Generalized Classical Truth Values. *The Logica Yearbook 2014*, P. Arazim and Peliš, M. (eds.), London: College Publications London, 2015, pp. 331-341.
- [5] Григорьев О.М., Зайцев Д.В. Две истины – одна логика. *Логические исследования* 17, 2011, сс. 121-139

Исследование выполнено в рамках проекта Российского гуманитарного научного фонда (РГНФ), грант № а 16-03-00749.